

in Übereinstimmung mit den jüngsten Messungen^{35, 36}, von denen die genauesten Werte zwischen 1,695 und 1,712 mit einem Fehler von 0,005 bis 0,008 lieferten³⁶.

³⁵ H. T. Motz, Phys. Rev. **85**, 501 [1952]; E. K. Hyde u. G. D. O'Kelley, ebd. **82**, 944 [1951]; H. M. Agnew, ebd. **77**, 655 [1950]; L. M. Langer u. H. C. Price jr., ebd. **76**, 641 [1949]; W. C. Peacock, J. W. Jones u. R. T. Overman, Plutonium Project Report Mon N-432, 56 [1947] (zitiert aus²); C. M. Witcher,

Herrn Prof. J. H. D. Jensen danken wir für belehrende Diskussionen über das Kernschalenmodell.

Für diese Untersuchung wurden Apparate der Deutschen Forschungsgemeinschaft mitbenutzt.

Phys. Rev. **60**, 32 [1941]; J. L. Lawson, ebd. **56**, 131 [1939].

³⁶ E. N. Jensen, R. T. Nichols, J. Clement u. A. Pohm, Phys. Rev. **85**, 112 [1952]; R. K. Sheline, R. B. Holtzman u. C.-Y. Fan, ebd. **83**, 919 [1951]; S. D. Warshaw, J. J. L. Chen u. G. L. Appleton, ebd. **80**, 288 [1950]; K. Siegbahn, ebd. **70**, 127 [1946].

Zur Kinetik des konvektiven Wärmeüberganges und der Strömungsreibung an spiegelnden Oberflächen

Von EUGEN SÄNGER*

(Z. Naturforschg. **9a**, 410—418 [1954]; eingegangen am 30. Januar 1954)

Eine der ernstesten Schwierigkeiten des Fluges mit hohen Überschall-Mach-Zahlen besteht bekanntlich in der Reibungserwärmung der schnellen Gase in den Strömungsgrenzschichten und in dem damit verbundenen hohen konvektiven Wärmeübergang an die vom Fahrtwind oder von den Antriebsstrahlen berührten festen Oberflächen fliegender Körper.

Es werden die gaskinetischen Bedingungen studiert, die durch Anwendung spiegelnd glatter Wände — d. h. solcher mit Rauigkeiten die vergleichbar mit den Materiewellenlängen der auftretenden Korpuskularstrahlen sind — zu einer erheblichen Herabsetzung von Wärmeübergang und Reibung führen könnten.

Die Ansprüche an die Glätte solcher Spiegelwände erweisen sich als sehr erheblich und als unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit. Atmosphärische Luft zeigt überwiegende Spiegelreflexion erst bei Wandrauigkeiten zwischen 10^{-9} und 10^{-8} cm, dasselbe gilt für das atomare Wasserstoffgas bzw. Protonengas der Plasmen von etwa $10\,000\text{ }^{\circ}\text{K}$, während das Elektronengas solcher Plasmen schon bei Rauigkeiten zwischen 10^{-8} und 10^{-7} cm überwiegend spiegelnd reflektiert wird. Vergleichsweise beginnt sichtbares Licht bei Rauigkeiten von 10^{-4} cm gespiegelt zu werden.

Endlich werden geschlossene Formeln gegeben für die Beiträge zu Wärmeübergang und Reibung der drei kinetischen Grenzflächenvorgänge:

1. Aufprall des dann an der Wand haftenden Partikelanteils (positiver Wärmeübergang und Reibung);
2. Diffuse Wiederauslösung des an der Wand haftenden Partikelanteils (negativer Wärmeübergang, kein Reibungsbeitrag);
3. Elastische Reflexion des spiegelnd zurückgeworfenen Partikelanteils (positiver oder negativer Wärmeübergang, kein Reibungsbeitrag).

Der üblichen Grenzschichttheorie der Strömungsreibung an einer Wand und des konvektiven Wärmeüberganges an die Wand liegt die Annahme zugrunde, daß die Grenzschicht an der Wand „haftet“, oder gaskinetisch gesprochen, daß die aufprallenden Gasmoleküle nicht spiegelnd, sondern diffus reflektiert werden.

Aus Molekularstrahlversuchen ist bekannt, daß dies im allgemeinen auch zutrifft, daß aber in Analogie zu den Photonenstrahlen auch Atom- und Molekularstrahlen dann spiegelnd an einer Wand reflektiert werden, wenn die Höhe ξ der Uneben-

heiten der Wand, auf den Strahl projiziert, kleiner wird, als die de Broglie-Wellenlänge $\lambda = h/mw$ des Strahles.

Darin ist h das Plancksche Wirkungsquantum, m die Partikelmasse und w ihre Auftreffgeschwindigkeit.

Bezeichnet man noch mit α den wirklichen und mit α_k den kritischen Auftreffwinkel, so gilt also für spiegelnde Reflexion:

$$\sin \alpha \leq \sin \alpha_k = \lambda/\xi = h/mw\xi. \quad (1)$$

Diese Beziehung entspricht etwa der Bragg'schen Beziehung der Röntgenoptik und gilt daher auch, wenn die de Broglie-Wellenlänge der Gaspartikel

* Courcelle-sur-Yvette (S.- & -O.), France.



im Gebiet der Röntgenwellenlängen liegt, was beispielsweise für Luft im gesamten technisch interessierenden Flug-Mach-Zahlbereich von 0 bis 40 zutrifft.

Der Grenzwinkel α_k wird gleich $\pi/2$, d. h. es werden alle Gaspartikel spiegelnd reflektiert, welches auch ihr Auftreffwinkel sei, wenn die Molekulargeschwindigkeit

$$w \leq h/m\xi, \quad (2)$$

also die Rauigkeitshöhe ξ kleiner als die Wellenlänge λ wird, ein bekanntes, allgemeines Grundgesetz spiegelnder Reflexion.

Für die Rauigkeit von Kristallspaltflächen oder Oberflächenfilmen normaler Zimmertemperatur von $\xi \sim 1 \text{ \AA}$ trifft dies daher beispielsweise zu:

bei Molekulargeschwindigkeiten atmosphärischer Luft unter etwa $w \leq 138 \text{ m/sec}$,

bei den Partikelgeschwindigkeiten atomaren Wasserstoffes unter etwa $w \leq 4000 \text{ m/sec}$,

bei Elektronengeschwindigkeiten unter etwa $w \leq 7,290000 \text{ m/sec}$.

Für die Rauigkeit geschliffener, technischer Flächen von $\xi \sim 10^4 \text{ \AA}$, die dem Auge in der senkrechten Aufsicht eben schon spiegelnd erscheinen, sind diese Grenzgeschwindigkeiten um vier Zehnerpotenzen kleiner, also für die erwähnten Beispiele

0,0138 m/sec; 0,4 m/sec und 729 m/sec.

Alle langsameren Partikel werden spiegelnd reflektiert.

	c_1 [m/sec]	λ [Å]
Luft von Stratosphären-temperatur	353	0,39
atomarer Wasserstoff- oder Protonengas von 10 000 °K	12 900	0,31
Elektronengas von 10 000 °K	550 000	13,23

Tab. 1. Häufigste oder wahrscheinlichste Partikelgeschwindigkeit

$$c_1 = \sqrt{2kT/m} = \sqrt{2gRT} \quad (3)$$

und die entsprechenden Wellenlängen.

Diese in Tab. 1 erwähnten Gase müßten daher von zimmerwarmen Kristallspaltflächen schon zu

¹ E. Säger, Deutsche Luftfahrtforschung, F. B. 972, Berlin 1938. — Douglas Aircraft Corp., Transl. F. R. 369, Santa Monica 1946. — NACA, T. M. 1270, Washington DC 1950.

einem gewissen Bruchteil spiegelnd reflektiert werden.

1. Ruhendes Gas

Der zunächst zu untersuchende Fall, daß die der Wand unmittelbar benachbarten Gasmassen keine Systemgeschwindigkeit parallel zur Wand besitzen, ist praktisch nicht nur dann gegeben, wenn die gesamte Gasmasse zur Wand in Ruhe ist, sondern in sehr guter Annäherung auch bei mit beliebig hohen Mach-Zahlen strömenden Gasen, die in Wandnähe eine Strömungsgrenzschicht ausbilden, bei denen also die freie Weglänge der Partikel oder der spiegelnd reflektierende Partikelanteil nicht zu hoch sind.

In diesen letzteren Fällen muß natürlich nicht die Temperatur der freien Strömung, sondern die wandnahe Grenzschichttemperatur den Rechnungen zugrunde gelegt werden, deren Höhe allerdings von vornherein meist unbekannt ist.

Bezeichnen wir mit c die nach allen Richtungen des Raumes zielenden, thermischen Schwirrgeschwindigkeiten der Gaspartikel, so gruppieren sich diese nach der Maxwell-Boltzmann-Verteilung.

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{c^2}{c_1^3} e^{-c^2/c_1^2} dc \quad (4)$$

um die häufigste Geschwindigkeit c_1 , wobei $d\varrho/\varrho$ der relative Massenanteil je Volumeneinheit ist, dessen Geschwindigkeitsgröße zwischen c und $c+dc$ liegt. Wir greifen in Abb. 1 diesen Massenanteil $d\varrho$ fast homogener Schwirrgeschwindigkeit c heraus. Beachten wir, daß $d\varrho dF/4c^2\pi$ die durch das Flächenelement $dF=2c^2\pi \cos \alpha d\alpha$ der gezeichneten

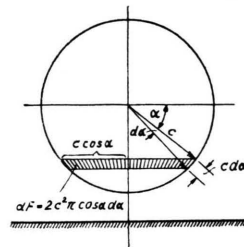


Abb. 1. Geometrie des Aufpralles der Partikel ruhenden Gases auf eine Wand.

Geschwindigkeitskugel gehende Partikelmasse ist, so ergibt sich die sekundlich auf die Flächeneinheit der Platte aufrallende Partikelmasse zu dem bekannten Wert^{1, 2}

$$dM = \frac{d\varrho}{4c^2\pi} \int_{\alpha=0}^{\pi/2} c \sin \alpha dF = \frac{c d\varrho}{4}. \quad (5)$$

² E. Säger, Schweizer Archiv f. angew. Wissenschaft u. Technik, 16, 43, Solothurn 1950.

Davon wird also jener Anteil spiegelnd reflektiert werden, für den $\alpha < \alpha_k$ ist:

$$dM_1 = \frac{d\varrho}{4c^2\pi} \int_{\alpha=0}^{\arcsin h/mc\xi} c \sin \alpha dF = \frac{c d\varrho}{4} \left(\frac{h}{mc\xi} \right)^2 = \frac{c d\varrho}{4} \sin^2 \alpha_k, \quad (6)$$

soweit $\lambda/\xi = h/mc\xi < 1$, andernfalls wird die Gesamtmasse dM spiegelnd reflektiert.

Es ist von gewisser praktischer Bedeutung, daß infolge der Geometrie des diffusen Aufpralles der spiegelnd reflektierende Anteil nicht einfach proportional ($h/mc\xi$) ist, sondern proportional dem Quadrat dieses Winkelsinus, wodurch sich eine gegebene Verminderung der Rauigkeit ξ quadratisch auswirkt.

Bezieht man mit Hilfe der Maxwell-Boltzmann-Verteilung alle Partikel mit den verschiedenen möglichen Geschwindigkeiten c zwischen null und unendlich in die Rechnung ein, so wird die Gesamtmasse M der sekundlich auf die Wandflächeneinheit aufprallenden Partikel, wie bekannt

$$M = \int_{c=0}^{\infty} \frac{c d\varrho}{4} = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \int_{c=0}^{\infty} \frac{c^3}{c_1^3} e^{-c^2/c_1^2} dc = \frac{\varrho c_1}{2\sqrt{\pi}} \quad (7)$$

und die Gesamtmasse M_1 der mit kleinerem als dem kritischen Auftreffwinkel α_k aufprallenden, also spiegelnd reflektierenden Partikel

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{c=0}^{h/m\xi} \frac{c d\varrho}{4} + \int_{c=h/m\xi}^{\infty} \frac{c d\varrho}{4} \left(\frac{h}{mc\xi} \right)^2 \\ &= \frac{\varrho c_1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{x=0}^{h/mc_1\xi} x^3 e^{-x^2} dx + \left(\frac{h}{mc_1\xi} \right)^2 \int_{x=h/mc_1\xi}^{\infty} x e^{-x^2} dx \right] \\ &= \frac{\varrho c_1}{2\sqrt{\pi}} [1 - e^{-(h/mc_1\xi)^2}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Daher wird der spiegelnd reflektierende Bruchteil aller auftreffenden Partikel:

$$\zeta = M_1/M = 1 - e^{-(h/mc_1\xi)^2}. \quad (9)$$

Für sehr kleine $h/mc_1\xi$ wird nach Reihenentwicklung:

$$\zeta \sim (h/mc_1\xi)^2 = (\lambda/\xi)^2. \quad (9a)$$

Dieser Bruchteil ist also lediglich durch den auf die häufigste Partikelgeschwindigkeit c_1 bezogenen Wert $h/mc_1\xi$ bestimmt, der grundsätzlich auch größer als eins werden kann, also nicht mehr als Winkelsinus zu interpretieren ist. Erst für $h/mc_1\xi = 0$ wird auch ζ gleich null, also streng genommen nie-

mals. Daß hier auch $h/mc_1\xi > 1$ werden kann, rührt daher, daß auch in diesem Fall noch Partikel mit $h/mc\xi < 1$ enthalten sind, die diffus reflektiert werden. Erst mit $h/mc_1\xi \rightarrow \infty$ wird der diffus reflektierende Anteil verschwinden und daher ζ gegen eins gehen, wie Gl. (9) richtig wiedergibt.

Abb. 2 zeigt nach Gl. (9) den Bruchteil ζ spiegelnd reflektierender Partikel und zwar für Luftmoleküle, Wasserstoffatome, Elektronen und Photonen sichtbaren Lichtes, in Abhängigkeit von der Wandrauhigkeit ξ und für verschiedene Gastemperaturen T .

Luft von Stratosphärentemperatur $T = 216,5^\circ\text{K}$ zeigt überwiegende Anteile spiegelnder Reflexion erst bei Rauigkeiten zwischen 10^{-8} und 10^{-9} cm, wie sie bei stark unterkühlten, idealgeordneten Flächen von Einkristallen denkbar sind, etwa bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffes, wobei die Freiheit dieser Oberflächen von adsorbierten Gasschichten und sonstigen Verunreinigungen eine wesentliche Rolle zu spielen scheint, die durch sehr niedrige Wandtemperaturen ungünstig beeinflußt wird.

Bei niedrigeren Lufttemperaturen steigt der Anteil, bei höheren Lufttemperaturen, wie sie gegebenenfalls in den Grenzschichten der Flugzeugoberflächen bei sehr hohen Flug-Mach-Zahlen herrschen, sinkt der Anteil spiegelnd reflektierender Luftmoleküle recht wesentlich ab.

Bei den heute üblichen Oberflächenrauigkeiten fliegender Körper oder von Ofen- und Düsen-Wänden der Triebwerke (über 10^{-4} cm) ist der Bruchteil spiegelnder Reflexion zwar nicht null, aber praktisch völlig vernachlässigbar und die übliche Annahme des Haftens der Strömungsgrenzschicht an der Oberfläche ist durchaus gerechtfertigt.

Während also der erste Schritt einer wesentlichen Herabsetzung der aerodynamischen Strömungsreibung und des Wärmeüberganges durch Erzwingung laminarer Grenzschichten ein Problem makroskopischer Formgebung der Wände („Laminarprofile“) war, wird der weitere Schritt, durch Ausnutzung spiegelnder Molekularreflexion zu geringerer Reibung und kleinerem Wärmeübergang zu kommen, ein sehr schwieriges Problem submikroskopischer Formgebung der Wandoberflächen, also überwiegend technologischer Natur. Entscheidende Fortschritte sind nur zu erwarten, wenn die Wandrauhigkeiten wesentlich unter die Größenordnung atomarer Rauigkeiten (unter 10^{-8} cm) gesenkt werden können.

Etwas günstiger wird das Bild für leichtere Gase, da der kritische Parameter $h/mc_1\xi = h/\xi\sqrt{2kTm}$ mit sinkender Partikelmasse wächst, wenn dieser Einfluß nicht durch erhöhte Gasttemperaturen ausgeglichen wird.

Atomares Wasserstoffgas oder Protonengas von 10 000 °K, wie es etwa für thermische Atomraketen

Dagegen liegen die Verhältnisse für den Elektronenanteil derartiger Plasmen um mehr als eine Zehnerpotenz günstiger, d. h. Elektronengas von 10 000 °K zeigt fast vollständig spiegelnde Reflexion schon bei Wandrauigkeiten zwischen 10^{-7} und 10^{-8} cm.

In stark ionisierenden Feuergasen kann daher der konvektive Wärmeübergang aus der Elektronenkomponente etwas leichter durch glatte Wände beeinflusst werden, als jener aus den schweren Partikeln.

In Abb. 2 ist schließlich auch noch der Bruchteil spiegelnder Reflexion für völlig diffuses Licht einheitlicher Wellenlänge von $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ eingetragen, um den Vergleich mit der spiegelnden Reflexion echter Partikel zu erleichtern.

Der kritische Auftreffwinkel ist in diesem Fall $\sin \alpha_k = \lambda/\xi$, die Photongasdichte ρ , die homogene Geschwindigkeit c gleich der Lichtgeschwindigkeit, die insgesamt in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit fallende Photonenmasse wird nach Gl. (5) $M = \rho c/4$ und der Anteil spiegelnd reflektierender Photonen nach Gl. (6) $M_1 = \rho c/4 \cdot (\lambda/\xi)^2$, so daß Gl. (9) für homogenes Licht die Form annimmt:

$$\zeta = M_1/M = (\lambda/\xi)^2. \quad (9b)$$

Für $\lambda/\xi > 1$ wird $\zeta = 1$, also alles spiegelnd reflektiert.

Die Luftmoleküle erreichen ähnliche Anteile spiegelnder Reflexion wie die Lichtphotonen daher bei etwa im Verhältnis der Wellenlängen, also bei rund zehntausendfach geringerer Rauigkeit ξ der Wand.

Die letzte Annäherung des spiegelnden Bruchteiles an eins ist wegen der Auswirkung der Maxwellverteilung der Schwirrgeschwindigkeiten bei echten Partikeln noch etwas schwieriger als bei homogenem, diffusum Licht (Boltzmann-gegen Bose-Statistik).

Der Wärmeübergang vom ruhenden Gas an die Wand erfolgt nun nach einem voneinander sehr ver-

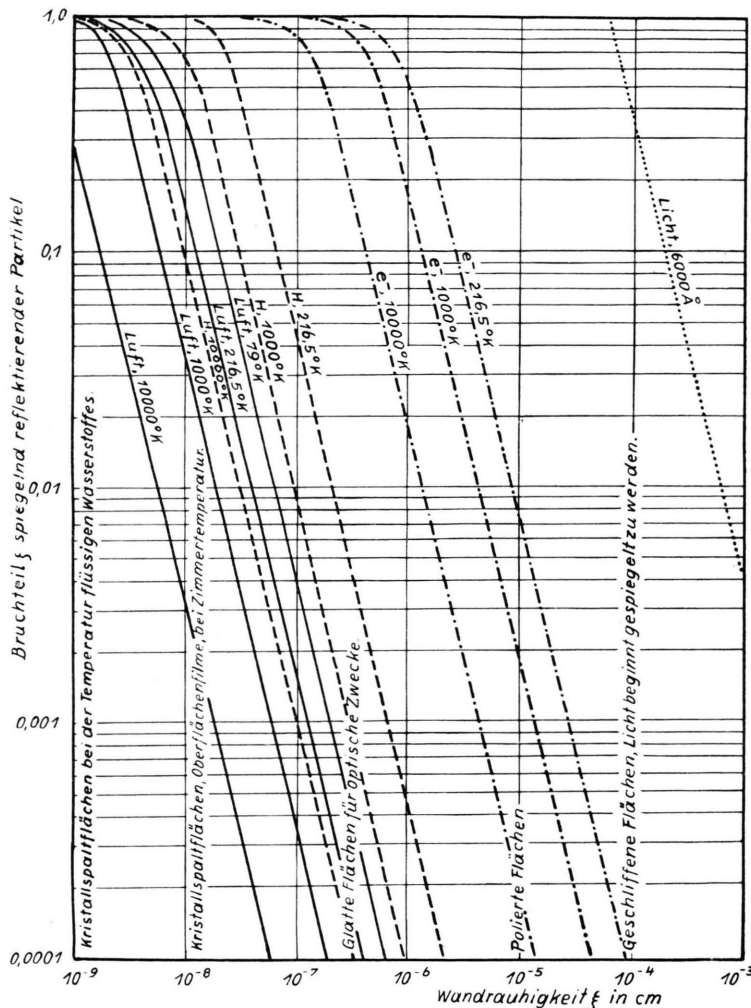


Abb. 2. Der Bruchteil ζ spiegelnd reflektierender Gaspartikel in Abhängigkeit von der Wandrauigkeit ξ und der Gasttemperatur. (— Luft; ---- atomarer Wasserstoff, Protonengas; - - - - Elektronengas Photonengas von $\lambda = 6000 \text{ \AA}$).

von Bedeutung sein kann, zeigt z. B. praktisch dieselben Anteile spiegelnd reflektierender Partikel, wie Luft von Stratosphärentemperatur, also überwiegend spiegelnde Reflexion erst bei Wandrauigkeiten zwischen 10^{-8} und 10^{-9} cm.

schiedenen Mechanismus bei diffus reflektierenden, und bei spiegelnd reflektierenden Partikeln.

Diffus reflektierende Partikel kommen nach dem Aufprall auf die Wand an dieser zur Ruhe und geben daher zumindest ihre gesamte kinetische Mehr-energie gegenüber der Wand, teilweise auch ihre inneren Energien an die Wand ab und nehmen die Temperatur derselben an.

Zur Berechnung der übertragenen äußeren Energien in der Zeiteinheit auf die Wandflächeneinheit können wir folgendermaßen vorgehen:

Die mit dM an die Wand gebrachte Energie beträgt:

$$dE_d = \frac{d\rho}{4c^2\pi} \int_{\alpha=\arcsin h/mc\xi}^{\pi/2} c \sin \alpha \frac{c^2}{2} 2c^2\pi \cos \alpha d\alpha \\ = \frac{c d\rho}{4} [1 - (h/mc\xi)^2] \frac{c^2}{2}, \quad (10)$$

d. i. also einfach die gesamte kinetische Energie der mit überkritischem Winkel aufprallenden Masse.

Nach Einbeziehung aller c zwischen $h/m\xi$ und unendlich mittels der Gl. (4) folgt:

$$E_d = \int_{c=h/m\xi}^{\infty} \frac{c d\rho}{4} [1 - (h/mc\xi)^2] \frac{c^2}{2} \\ = \frac{\rho c_1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(h/mc_1\xi)^2} \frac{c_1^2}{2} [2 + (h/mc_1\xi)^2]. \quad (11)$$

Mit $h/mc_1\xi \rightarrow \infty$ (nur spiegelnde Reflexion) geht E_d gegen null.

Dieser Energiebetrag E_d ist größer, als etwa die thermische Translations-Energie der mit überkritischem Winkel aufprallenden Masse

$$\frac{\rho c_1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(h/mc_1\xi)^2} \frac{3}{4} c_1^2,$$

worin sich die Tatsache bemerkbar macht, daß die schnelleren Partikel in der Maxwell-Verteilung nicht nur höhere Energie haben, sondern auch häufiger auf die Wand treffen (worauf H. S. Tsien erstmals aufmerksam machte), und kleinere kritische Auftreffwinkel haben, als die langsameren Partikel.

Wenn auch innere Energien in der Höhe von E_i je Masseneinheit ankommenden Gases vorhanden sind, so ist bei völliger Akkomodation der Wärmeübergang aus ihnen offenbar:

$$E_{d1} = \frac{\rho c_1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(h/mc_1\xi)^2} E_i. \quad (12)$$

Für die mit den diffus von der Wand wegfliegenden Partikeln wieder mitgeführte Energie wird meist

angenommen, daß sie durch die Wandtemperatur T_w bestimmt wäre zu

$$E_r = \frac{\rho c_1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(h/mc_1\xi)^2} \cdot (g c_v T_w), \quad (13)$$

worin c_v die spezifische Wärme des Gases, je nach Akkomodationskoeffizient auch mit Einschluß der inneren Freiheitsgrade ist.

Der Wärmeübergang der spiegelnd reflektierenden Partikel erfolgt nach einem völlig verschiedenen Mechanismus.

Wäre die Wand ein ideal starrer Körper, mit gegenüber der Masse der aufprallenden Partikel unendlich großer Masse, so fände von vornherein überhaupt keine Energieübertragung statt und Reflexions- und Auftreff-Winkel wären streng gleich, ebenso wie Auftreff- und Reflexions-Geschwindigkeit.

Tatsächlich reflektieren die auftreffenden Partikel der Masse m aber an den individuellen Atomen des Kristallgitters der Wand, die die Masse m_w haben mögen.

Während dabei die tangentielle Geschwindigkeitskomponente ($c \cos \alpha$) des auftreffenden Partikels ungeändert bleibt, wird nach den Gesetzen des elastischen Stoßes die wandnormale Geschwindigkeitskomponente ($c \sin \alpha$) des auftreffenden Partikels eine Änderung erfahren, die von der Masse m_w und der Geschwindigkeit c_w des getroffenen Wandatoms abhängt^{3, 4}, und zwar wird die wandnormale Geschwindigkeitskomponente nach dem elastischen Stoß etwa

$$c \sin \alpha \frac{(m/m_w - 1) - 2c_w/c \sin \alpha}{1 + m/m_w} \quad (14)$$

betragen, auch der Reflexionswinkel wird sich im selben Verhältnis ändern und das Teilchen wird den Energiebetrag

$$\frac{mc^2 \sin^2 \alpha}{2} \frac{4(m/m_w - c_w/c \sin \alpha)}{(1 + m/m_w)^2} (1 + c_w/c \sin \alpha) \quad (15)$$

an die Gitteratome der Wand übertragen oder von diesen übernehmen. Dieser Betrag hängt somit vom Verhältnis der Atomgewichte der Gaspartikel und der Wandatome ab, und außerdem vom Verhältnis der Schwingungsgeschwindigkeit der Wandatome im Gitter, zur wandnormalen Geschwindigkeitskomponente der Gasteilchen.

Die von dM in der Zeiteinheit an die Wandflächeneinheit übertragene oder von dieser übernommene Energie beträgt in diesem Fall:

³ E. Sängner, J. Métaux, XXII, 317, 44 [1952].

⁴ E. Sängner, VDI-Forschungsheft 1953, 437.

$$dE_s = \frac{d\rho}{4c^2\pi} \int_{\alpha=0}^{\arcsin h/mc\xi} c \sin \alpha \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2} \frac{4(m/m_w - c_w/c \sin \alpha)}{(1 + m/m_w)^2} (1 + c_w/c \sin \alpha) 2c^2\pi \cos \alpha d\alpha$$

$$= \frac{4m/m_w}{(1 + m/m_w)^2} \frac{c d\rho}{4} \frac{c^2}{2} \left[\frac{1}{2} (h/mc\xi)^4 + \frac{2}{3} \frac{c_w}{c} \left(1 - \frac{m_w}{m}\right) (h/mc\xi)^3 - \frac{c_w^2}{c^2} \frac{m_w}{m} (h/mc\xi)^2 \right], \quad (16)$$

soweit $h/mc\xi < 1$, andernfalls wird

$$dE_s = \frac{4m/m_w}{(1 + m/m_w)^2} \frac{c d\rho}{4} \frac{c^2}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{c_w}{c} \left(1 - \frac{m_w}{m}\right) - \frac{c_w^2}{c^2} \frac{m_w}{m} \right].$$

Nach Einbeziehung aller c zwischen null und unendlich mittels Gl. (4) folgt:

$$E_s = \int_{c=0}^{h/m\xi} \frac{4m/m_w}{(1 + m/m_w)^2} \frac{c d\rho}{4} \frac{c^2}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{c_w}{c} \left(1 - \frac{m_w}{m}\right) - \frac{c_w^2}{c^2} \frac{m_w}{m} \right] + \int_{c=h/m\xi}^{\infty} \frac{4m/m_w}{(1 + m/m_w)^2} \frac{c d\rho}{4} \frac{c^2}{2} \left[\frac{1}{2} (h/mc\xi)^4 \right.$$

$$+ \left. \frac{2}{3} \frac{c_w}{c} \left(1 - \frac{m_w}{m}\right) (h/mc\xi)^3 - \frac{c_w^2}{c^2} \frac{m_w}{m} (h/mc\xi)^2 \right] = \frac{4m/m_w}{(1 + m/m_w)^2} \frac{\rho c_1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{c_1^2}{2} \left\{ 1 - e^{-(h/mc_1\xi)^2} [1 + (h/mc_1\xi)^2] \right.$$

$$+ \left. \frac{c_w}{c_1} \left(1 - \frac{m_w}{m}\right) \left[\int_0^{h/mc_1\xi} e^{-x^2} dx - e^{-(h/mc_1\xi)^2} (h/mc_1\xi) \right] + \frac{c_w^2}{c_1^2} \frac{m_w}{m} [e^{-(h/mc_1\xi)^2} - 1] \right\}. \quad (17)$$

Für $c_w=0$ (ruhende Gitteratome) und $h/mc\xi_1=\infty$ (völlig glatte Wand) wird die geschwungene Klammer gleich eins, es folgt der bekannte optische Energieaustausch. Für $h/mc_1\xi=0$ (völlig rauhe Wand) verschwindet der elastische Energieaustausch.

Dieser Wärmeübergangsbetrag kann je nach den vorliegenden Verhältnissen positiv (Wärme vom Gas zur Wand) oder negativ (umgekehrt) sein.

Tatsächlich wird in vielen Fällen die Wandtemperatur $T_w = m_w c_w^2 / 3k$ gegenüber der Gastemperatur $T = m c_m^2 / 3k = m c_1^2 / 2k$ keineswegs vernachlässigbar sein, an den Außenoberflächen von Überschallflugzeugen wird sie sogar oft erheblich höher als die Temperatur der ungestörten Luft sein, so daß tatsächlich Energie von den Wandatomen an die spiegelnd reflektierenden Luftmoleküle übertragen wird, diese also kühlend auf die Wand wirken.

Aus Gl. (17) folgt auch ohne weiteres, daß der Energieaustausch zwischen Wand und spiegelnd reflektierendem Gas nicht etwa verschwindet, wenn die Temperaturen T_w und T gleich geworden sind, ebensowenig, wie beim Strahlungsaustausch zwischen einem strahlenden Gas und einer Wand. Durch Nullsetzen der geschwungenen Klammer in Gl. (17) folgt vielmehr die Bedingung, unter der der Energieaustausch im Mittel bei spiegelnder Reflexion verschwindet, also auch Einfalls- und Reflexionswinkel im Mittel untereinander gleich sind. Der individuelle Energieaustausch der Einzelpartikel verschwindet nach den Gesetzen elastischen Stoßes bekanntlich, wenn die Partikelgeschwindig-

keiten sich verhalten wie $c_w/c = m/m_w$, infolge der Maxwell-Verteilung der c im Gas gibt es bei einem vorgegebenen Zustand neben solchen Teilchen, die keinen Energieaustausch haben, immer auch andere, die Energie an die Wand abgeben, und wieder andere, die Energie von der Wand übernehmen. Die durch Nullsetzen der Klammer in Gl. (17) erhaltene Beziehung definiert daher jenen mittleren Gesamtzustand, wo sich die Wärmeabgabe an die Wand mit der Wärmeaufnahme aus ihr gerade ausgleichen. Dieser Zustand hängt nicht nur von m/m_w ab, sondern auch von $h/mc_1\xi$, weil die Geschwindigkeitsbereiche spiegelnd reflektierender Teilchen in der Maxwell-Verteilung sich mit ihm ändern.

Wir können die drei Komponenten E_d , E_r und E_s des konvektiven Wärmeüberganges auf das sogenannte Konvektionsprodukt $K = \gamma H_0 c_m$ (aus spezifischem Gasgewicht γ , Enthalpie H_0 des ruhenden Gases und mittlerer Teilchengeschwindigkeit c_m)⁵ beziehen und dieses Verhältnis als dimensionslosen Beiwert des Wärmeüberganges benutzen.

Für die äußeren Freiheitsgrade allein wird das Konvektionsprodukt

$$K = \frac{5}{6} \rho c_m^3 = \frac{5}{6} \left(\frac{3}{2} \right)^{3/2} \rho c_1^3. \quad (18)$$

Damit folgt der Beiwert des Wärmeüberganges aus dem Aufprall des diffus reflektierenden Massenanteiles aus Gl. (11) und (18):

⁵ I. Sängner-Bredt, Z. Naturforschg. **8a**, 12, 796 [1953].

$$E_d/K = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} e^{-(h/mc_1 \xi)^2} [2 + (h/mc_1 \xi)^2] \quad (19)$$

und aus dem Rückprall desselben Massenanteiles nach Gl. (13) und (18)

$$E_r/K = -\frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} e^{-(h/mc_1 \xi)^2} \frac{m_w}{m} \left(\frac{c_w}{c_1}\right)^2 \quad (20)$$

und schließlich der Beiwert des Wärmeüberganges aus dem spiegelnd reflektierenden Massenanteil nach Gl. (17) und (18)

$$E_s/K = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{4 m/m_w}{(1 + m/m_w)^2} \cdot \left\{ 1 - e^{-(h/mc_1 \xi)^2} [1 - (h/mc_1 \xi)^2] \right. \\ \left. + \frac{c_w}{c_1} \left(1 - \frac{m_w}{m}\right) \left[\int_0^{h/mc_1 \xi} e^{-x^2} dx - e^{-(h/mc_1 \xi)^2} (h/mc_1 \xi) \right] \right. \\ \left. + \frac{c_w^2}{c_1^2} \frac{m_w}{m} [e^{-(h/mc_1 \xi)^2} - 1] \right\}. \quad (21)$$

Während also der erste dieser drei Wärmeübergangsbeiwerte nur vom kritischen Wert $h/mc_1 \xi$ abhängt, spielen bei den beiden andern auch die Verhältnisse der Atomgewichte von Gasparkeln und Wandatomen und von deren Temperaturen ihre Rolle.

2. Strömendes Gas

Strömendes Gas kann in unmittelbarer Nähe einer festen Wand bekanntlich eine wandparallele Strömungsgeschwindigkeit nur dann besitzen, wenn es keine Strömungsgrenzschicht bildet, also z. B. wenn die freie Weglänge der Gasteilchen groß ist gegenüber der Länge der beströmten Wand (z. B. sehr große Flughöhe), so daß jedes überhaupt mit der Wand kollidierende Teilchen nur einmal auf die Wand trifft, oder aber näherungsweise auch noch, wenn die Wandrauhigkeit ξ so klein ist, daß die Zahl der diffus reflektierenden Partikel vernachlässigbar wird.

Nur unter diesen Voraussetzungen darf die in den folgenden Überlegungen zum strömenden Gas benutzte wandnahe Strömungsgeschwindigkeit v gleich der Fluggeschwindigkeit bzw. der Geschwindigkeit in der freien Strömung gesetzt werden.

Führen wir zu den Größen der Abb. 1 also noch die Strömungsgeschwindigkeit v des Gases in Wandnähe ein, d. h. die geordnete, wandparallele Systemgeschwindigkeit aller ankommenden Gasparkel, so entstehen die in Abb. 3 dargestellten Verhältnisse. Die Geschwindigkeitsresultierende aus System- und Schwirr-Geschwindigkeit wird

$$w^2 = v^2 + c^2 + 2 v c \cos \alpha \cos \beta$$

und der Neigungswinkel α_c derselben gegen die Begrenzungswand

$$\sin \alpha_c = \frac{c \sin \alpha}{w} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + v^2/c^2 + 2 v/c \cos \alpha \cos \beta}}. \quad (22)$$

Der Neigungswinkel α_c wird also gleich dem Grenzauftreffwinkel α_k , sobald die wandnormale Geschwindigkeitskomponente der Partikel ($c \sin \alpha$) gleich ist $h/m\xi$, genau wie beim ruhenden Gas.

Die wandparallele Strömungsgeschwindigkeit v ist daher ohne jeden Einfluß auf die Tatsache, ob ein bestimmtes Teilchen spiegelnd oder diffus reflektiert wird, diese Tatsache wird nur durch die von der thermischen Schwirrgeschwindigkeit herrührende, wandnormale Geschwindigkeitskomponente entschieden, und zwar, weil sich mit wachsender Auftreffgeschwindigkeit w sowohl der wirkliche, als auch der kritische Auftreffwinkel nach den Gln. (1) und (22) in ganz gleicher Weise ändern.

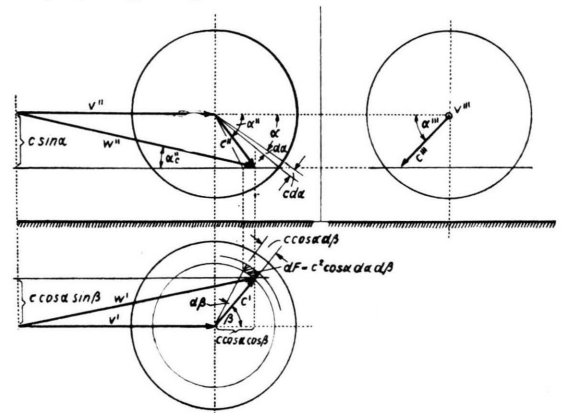


Abb. 3. Geometrie des Aufpralles der Partikel strömenden Gases auf eine Wand.

Da bei plattenparalleler Strömung bekanntlich (l. c.^{1, 2}) auch die Zahl der sekundlich auf die Flächeneinheit der Platte prallenden Teilchen unabhängig von der Systemgeschwindigkeit v gleich dem durch Gl. (7) gegebenen Wert $\rho c_1/2\sqrt{\pi}$ ruhenden Gases bleibt, gilt dasselbe auch für den Bruchteil ζ spiegelnd reflektierender Teilchen, d. h. Gln. (8) und (9) und damit Abb. 2 gelten nicht nur für ruhendes, sondern auch für strömendes Gas, wie man auch durch Einzelausrechnung der Verhältnisse der Abb. 3 analog zu jenen der Abb. 1 leicht zeigen kann.

Unterschiede zwischen strömendem und ruhendem Gas entstehen erst bei der Bestimmung der tatsächlichen Reibungskräfte und Wärmeübergänge.

Die spiegelnd reflektierenden Partikel liefern naturgemäß keine Beiträge zur Reibung, wohl aber zum Wärmeübergang.

Der wandparallele Impuls der sekundlich von der Flächeneinheit diffus reflektierenden Partikel vor ihrem Auftreffen betrug offenbar

$$\tau = \frac{v c_1 \varrho}{2 \sqrt{\pi}} e^{-(h/mc_1 \xi)^2}. \quad (23)$$

Dieser Impuls je Zeiteinheit ist gleich der Reibungskraft je Flächeneinheit, die also linear mit der Systemgeschwindigkeit v anwächst. Der Reibungsbeiwert in der üblichen Definition wird

$$\tau/q = \frac{c_1}{v} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(h/mc_1 \xi)^2} = \frac{a}{v} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-(h/mc_1 \xi)^2}, \quad (24)$$

wenn man statt der wahrscheinlichsten Partikelgeschwindigkeit $c_1^2 = 2gRT$ noch die Schallgeschwindigkeit $a^2 = \kappa gRT$ im Gas einführt.

Der Wärmeübergang infolge diffus reflektierender Teilchen ist wegen seiner quadratischen Ab-

hängigkeit von der resultierenden Aufprallgeschwindigkeit w etwas umständlicher zu ermitteln.

Wir beschränken uns wieder auf die mit den haftenden Teilchen an die Wand gebrachte Energie, während die von ihnen bei der diffusen Reflexion wieder mitgenommene Energie bekanntlich dadurch bestimmt sein soll, daß die haftenden und dann diffus reflektierenden Teilchen während der durchaus endlichen Verweilzeiten an der Wand deren Temperaturen annehmen, so daß dafür Gl. (13) gilt.

Wir greifen in Abb. 3 zunächst wieder den Massenanteil $d\varrho$ fast homogener Schwirrgeschwindigkeit c heraus. Beachten wir, daß $d\varrho dF/4c^2\pi$ hier die durch das Oberflächenelement $dF = c^2 \cos \alpha d\alpha d\beta$ der gezeichneten Geschwindigkeitskugel gehende Teilchenmasse ist, und daß deren kinetische Energie $d\varrho w^2/2$ beträgt, so wird die mit überkritischem Aufprallwinkel an die Wand gebrachte Energie

$$dE_d = \frac{d\varrho}{4c^2\pi} \int_{\alpha=\arcsin h/mc\xi}^{\pi/2} \int_{\beta=0}^{2\pi} c \sin \alpha \frac{v^2 + c^2 + 2vc \cos \alpha \cos \beta}{2} c^2 \cos \alpha d\alpha d\beta = \frac{c d\varrho}{4} \left[1 - (h/mc\xi)^2 \right] \left(\frac{v^2 + c^2}{2} \right), \quad (25)$$

d. i. einfach wieder die gesamte kinetische Energie der mit überkritischem Winkel aufprallenden Masse.

Bezieht man mit Hilfe der Gl. (4) nun wieder alle Partikel mit den verschiedenen, zu diffuser Reflexion führenden Geschwindigkeiten c zwischen $h/m\xi$ und unendlich in die Rechnung ein, so wird die gesamte, auf die Wand übertragene Energie:

$$E_d = \int_{c=h/m\xi}^{\infty} \frac{c d\varrho}{4} \left[1 - (h/mc\xi)^2 \right] \left(\frac{v^2 + c^2}{2} \right) \\ = \frac{\varrho c_1}{2\sqrt{\pi}} e^{-(h/mc_1)^2 \xi^2} \left\{ \frac{v^2}{2} + \frac{c_1^2}{2} \left[2 + (h/mc_1 \xi)^2 \right] \right\}. \quad (26)$$

Für $h/mc_1 \xi \rightarrow \infty$ geht E_d naturgemäß gegen null, jedoch wesentlich langsamer als τ .

Hier macht sich auch wieder in der geschwungenen Klammer die Tatsache bemerkbar, daß die schnellen Partikel in der Maxwell-Verteilung nicht nur höhere Energie haben, sondern auch häufiger auf die Wand treffen und kleinere kritische Auftreffwinkel α_k haben, als die energieärmeren.

Falls die Gasmoleküle außer der hier betrachteten kinetischen Energie auch noch innere Energien mit sich führen und an die Wand übertragen, etwa Rotations-, Schwingungs-, Termanregungs-, Dissoziations- oder Ionisations-Energien, so sind diese in

der geschwungenen Klammer als weitere Summanden anzufügen.

Den Wärmeübergangsanteil der spiegelnd reflektierenden Partikel kann man in analoger Weise wie bei den Gln. (16) und (17) ruhenden Gases ermitteln. Da die Systemgeschwindigkeit v keinen Einfluß auf die wandnormalen Geschwindigkeitskomponenten und damit auf die kritischen Auftreffwinkel hat, sind die beiden genannten Gleichungen hier unmittelbar zu verwenden.

Das Konvektionsprodukt $K = \gamma H_0 c_m$ wird für die äußeren Energien allein nunmehr

$$K = \frac{\varrho c_m}{2} \left(\frac{5}{3} c_m^2 + v^2 \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\varrho c_1}{2} \left(\frac{5}{2} c_1^2 + v^2 \right) \quad (27)$$

und damit der Beiwert des Wärmeüberganges aus dem Aufprall des diffus reflektierenden Massenanteiles aus Gl. (26) und (27):

$$E_d/K = \frac{1}{\sqrt{6}\pi} e^{-(h/mc_1 \xi)^2} \frac{v^2 + c_1^2 [2 + (h/mc_1 \xi)^2]}{v^2 + \frac{5}{2} c_1^2} \quad (28)$$

und aus dem Rückprall desselben Massenanteiles nach Gl. (13) und (27):

$$E_r/K = -\frac{1}{\sqrt{6}\pi} e^{-(h/mc_1 \xi)^2} \frac{m_w}{m} \frac{c_w^2}{v^2 + \frac{5}{2} c_1^2} \quad (29)$$

und schließlich der Beiwert des Wärmeüberganges aus dem spiegelnd reflektierenden Massenanteil nach Gl. (17) und (27):

$$E_s/K = \frac{1}{\sqrt{6}\pi} \frac{4 m/m_w}{(1 + m/m_w)^2} \left\{ \frac{1 - e^{-(h/mc_1\xi)^2} [1 + (h/mc_1\xi)^2] + \frac{c_w}{c_1} \left(1 - \frac{m_w}{m}\right) \left[\int_0^{h/mc_1\xi} e^{-x^2} dx - e^{-(h/mc_1\xi)^2} (h/mc_1\xi) \right]}{v^2/c^2 + 5/2} + \frac{\frac{c_w^2}{c_1^2} \frac{m_w}{m} [e^{-(h/mc_1\xi)^2} - 1]}{v^2/c^2 + 5/2} \right\}. \quad (30)$$

Mit $v=0$ gehen diese drei Gleichungen natürlich in die entsprechenden Gl. (19), (20) und (21) über.

Während der erste Wärmeübergangsbeiwert mit anwachsender Strömungsgeschwindigkeit asymptotisch dem konstanten Maximalwert

$$(E_d/K)_{v \rightarrow \infty} = \frac{1}{\sqrt{6}\pi} e^{-(h/mc_1\xi)^2}$$

zustrebt, gehen die beiden andern Beiwerte unter gleichen Bedingungen gegen null.

Man kann indes bei strömenden Gasen den Wärmeübergang statt auf das Konvektionsprodukt auch auf die Reibungsleistung τv beziehen und erhält beispielsweise mit Gl. (26) und (23):

$$E_s/\tau v = \frac{1}{\kappa} \frac{a^2}{v^2} \frac{4 m/m_w}{(1 + m/m_w)^2} \left\{ \frac{1 - e^{-(h/mc_1\xi)^2} [1 + (h/mc_1\xi)^2] + \frac{c_w}{c_1} \left(1 - \frac{m_w}{m}\right) \left[\int_0^{h/mc_1\xi} e^{-x^2} dx - e^{-(h/mc_1\xi)^2} (h/mc_1\xi) \right]}{e^{-(h/mc_1\xi)^2}} + \frac{\frac{c_w^2}{c_1^2} \frac{m_w}{m} [e^{-(h/mc_1\xi)^2} - 1]}{e^{-(h/mc_1\xi)^2}} \right\}. \quad (33)$$

Während der erste Wärmeübergangsbeiwert bei $v=0$ mit unendlich beginnend, mit wachsender Strömungsgeschwindigkeit asymptotisch gegen den

$$E_d/\tau v = \frac{1}{2} + \frac{1}{\kappa} \frac{a^2}{v^2} [2 + (h/mc_1\xi)^2]. \quad (31)$$

Beim diffusen Wärmeübergang tritt hier zu dem elementaren Beiwert

$$d E_d/\tau v = \frac{mv^2/2}{mv^2} = \frac{1}{2}$$

plastischen Aufpralles von Teilchen ohne Wärmebewegung noch ein Beitrag aus der Wärmebewegung, der z. B. zur Folge hat, daß ein ruhendes Gas mit $v=0$ durchaus endlich großen Wärmeübergang bewirkt.

Aus Gl. (13) und (23) folgt

$$E_r/\tau v = g c_v T_w/v^2 \quad (32)$$

und schließlich aus Gl. (17) und (23)

Grenzwert $E_d/\tau v = 1/2$ verläuft, gehen die beiden andern Beiwerte unter gleichen Bedingungen wieder gegen null.